

характеризующих процесс, использован метод механики сплошных сред с описанием очага деформации полем скоростей перемещений. Метод, предполагает использование уравнений механики сплошных сред в их наиболее общей форме, то есть в виде уравнений движения вязкой жидкости, а также специальных характеристик, позволяющих учитывать отличия в деформировании твердых металлов от течения вязких жидкостей.

2. В качестве основного материала при изготовлении специальных профилей с местами изгиба на  $180^\circ$  применяют сталь Ст.3, сталь 08кп с защитно-декоративными покрытиями (поливинилхлоридная пленка; лакокрасочное покрытие; цинк, алюминий или их сплавы). Относительное удлинение материалов покрытий на (15...100)% больше значений относительного удлинения стали, поэтому для оценки возможности радиального растяжения при изгибе выполнен анализ напряженно-деформированного состояния основного металла.

3. На основании исследования распределения утонения в местах изгиба полосы при ее формоизменении получены поле скоростей движения частиц металла (29) и компоненты скоростей деформации (31) для установления степени влияния утонения на величину нормальных и касательных напряжений и деформаций в местах изгиба.

**Список литературы:** 1. Гун Г.Я. Математическое моделирование процессов обработки металлов давлением. Учебное пособие для вузов. – М.: Металлургия, 1983. – 285 с. 2. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. 3-е изд. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 285 с. 3. Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2 т. т. 1 – 4-е изд. – М.: Наука, 1983. – 540 с. 4. Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2 т. т.2 – 4-е изд. – М.: Наука, 1983. – 585 с. 5. Алексеев Ю.Н. Вопросы пластического течения металлов.– Харьков: изд-во ХГУ, 1958. – 188 с. 6. Алексеев Ю.Н. Введение в теорию обработки металлов давлением, прокаткой и резанием.– Харьков: изд-во ХГУ, 1969. – 107 с. 7. Тришевский О.И. Исследование деформированного состояния металла на участке его изгиба на  $180^\circ$  // Тришевский О.И., Плеснецов С.Ю. / Международная научно-техническая конференция «Университетская наука 2009»: сб. тезисов докладов в 2-х томах. - Мариуполь: ПГТУ, 2009 т- 433 С.

УДК 539.374.001.8.621.7 – 111

**ЧИГИРИНСКИЙ В.В.**, докт. техн. наук, проф., ЗНТУ, г. Запорожье  
**АНДРЮЩЕНКО С.А.**, инженер, г. Запорожье  
**КОРНИЕНКО В.В.**, инженер, г. Запорожье.

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ ЗАГОТОВКИ В УСЛОВИЯХ РЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ**

Разработана математическая модель процесса пластического формоизменения с использованием замкнутого решения теории пластичности. Показанное влияние химического состава, деформационных, скоростных параметров процесса и температуры на напряженное состояние в процессе деформирования металла.

Ключевые слова: математическая модель, теория пластичности, напряженное состояние.

Розроблено математичну модель процесу пластичної формозміни з використанням замкнутого рішення теорії пластичності. Показаний вплив хімічного складу, деформаційних, швидкісних параметрів процесу й температури на напружений стан у процесі деформування металу. Ключові слова: Математична модель, теорія пластичності, напружений стан.

The mathematical model of process of plastic deformation with use of the closed decision of the theory of plasticity is developed. The shown influence of a chemical compound, deformation, high-speed parameters of process and temperature on an intense camp in the course of metal deformation. Key words: mathematical ,model theory of plasticity, an intense camp in the course.

## 1. Введение.

При изучении напряженного состояния пластической среды часто ограничиваются определением безразмерных значений напряженного состояния, например отношением нормального напряжения к пределу текучести [1]...[3]. В настоящее время используются методы определения среднего предела текучести в зоне деформирования [4], [5]. На основании экспериментальных данных, получены зависимости предела текучести от химического состава, степени, скорости деформации, температуры .

В работах [6]...[8] определена аналитически математическая модель пластической среды с использованием замкнутого решения плоской задачи теории пластичности. Показано, что поля напряжений, деформаций, скоростей деформаций и температур описываются одними координатными функциями. Появляется возможность решить задачу с учетом указанных выше факторов в каждой точке очага формоизменения.

## 2. Постановка задачи.

Система уравнений теории пластичности [6]

уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

условие пластичности

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2 = 4 \cdot k^2; \quad (2)$$

уравнения связи для скоростей деформаций и деформаций

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} = \frac{\xi_x - \xi_y}{\gamma'_{xy}} = F_1; \quad \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\gamma_{xy}} = F_2; \quad (3)$$

уравнения несжимаемости для скоростей деформаций и деформаций

$$\xi_x + \xi_y = 0; \varepsilon_x + \varepsilon_y = 0; \quad (4)$$

уравнения неразрывности скоростей деформаций и деформаций

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma'_{xy}}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x}; \quad (5)$$

уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (6)$$

Граничные условия для напряжений [7]

$$\tau_n = -k \cdot \sin[A\Phi - 2 \cdot \alpha] \text{ или } \tau_n = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2 \cdot \alpha - \tau_{xy} \cdot \cos 2 \cdot \alpha \right) \quad (7)$$

### 3. Решение задачи.

Используя уравнения (1),(2) после дифференцирования и преобразований получим обобщенное уравнение равновесия в виде [3]

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sqrt{k^2 - \tau_{xy}^2}. \quad (8)$$

Условие (7) определяет зависимость

$$\tau_{\phi\phi} = k \cdot \sin A\Phi. \quad (9)$$

Для сложной пластической среды задача решается с учетом подстановки

$$k = C_\sigma \cdot (H_i)^{m1} \cdot (\Gamma_i)^{m2} \cdot (T)^{m3} \cdot \exp \theta'_4 \quad (10)$$

Выражение (10) может быть составной частью решения (8), если его привести к виду, используя фундаментальную подстановку

$$k = C_\sigma \cdot \exp \theta'_1 \cdot \exp \theta'_2 \cdot \exp \theta'_3 \cdot \exp \theta'_4 = C_\sigma \cdot \exp \theta', \quad (11)$$

$$\text{где } \theta' = \theta'_1 + \theta'_2 + \theta'_3 + \theta'_4, \quad \theta'_1 = -A_1\theta, \quad \theta'_2 = -A_2\theta, \quad \theta'_3 = -A_3\theta,$$

$$\theta'_4 = -A_4\theta \quad \text{или} \quad \theta' = (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \cdot \theta = A \cdot \theta$$

Сумма экспонент определяется тем, что производная сложной функции представляется в виде суммы производных зависимых величин. После подстановки в обобщенное уравнение равновесие [9], получим

$$\left\{ \theta'_{xx} + (\theta'_x + A\Phi_y)^2 - \theta'_{yy} - (\theta'_y - A\Phi_x)^2 + 2A\Phi_{xy} \right\} \cdot \sin(A\Phi) + \\ \left\{ 2(\theta'_x + A\Phi_y)(A\Phi_x - \theta'_y) + A\Phi_{xx} - A\Phi_{yy} - 2\theta'_{xy} \right\} \cdot \cos(A\Phi) = 0, \quad (12)$$

где  $\theta'_x, \theta'_y, \theta'_{xy}$  - производные от суммарного показателя экспоненты по координатам  $x, y$  и смешанная производная  $xy$ ;

$\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3, \theta'_4$  - составляющие показателя экспоненты  $\theta'$ , учитывающие влияние скорости, степени деформации, температуры, контактного трения и фактора формы.

Для тождественного удовлетворения уравнения (12) должно выполняться условие  $\theta'_x = -A\Phi_y, \theta'_y = A\Phi_x$ .

Используя (3)...(5), в работах [9],[10] приведено решение деформационной задачи. Показано, что в составляющих тензоров напряжений, скоростей деформаций, деформаций и температур присутствуют одинаковые координатные функции  $\theta$  и  $\Phi$ . В этом случае имеем

$$\xi_x = -\xi_y = C_\xi \cdot \exp \theta''_1 \cdot \cos B_1\Phi = C_\xi \cdot \exp(-B_1\theta) \cdot \cos B_1\Phi, \\ \gamma'_{xy} = C_\xi \cdot \exp \theta''_1 \cdot \sin B_1\Phi = C_\xi \cdot \exp(-B_1\theta) \cdot \sin B_1\Phi, \quad (13)$$

$$H_i = 2 \cdot C_\xi \cdot \exp \theta''_1 = 2 \cdot C_\xi \cdot \exp(-B_1\theta),$$

$$\varepsilon_x = -\varepsilon_y = C_\varepsilon \cdot \exp \theta''_2 \cdot \cos B_2\Phi = C_\varepsilon \cdot \exp(-B_2\theta) \cdot \cos B_2\Phi,$$

$$\gamma_{xy} = C_{\varepsilon} \cdot \exp \theta_2'' \cdot \sin B_2 \Phi = C_{\varepsilon} \cdot \exp(-B_2 \theta) \cdot \sin B_2 \Phi, \quad (14)$$

$$\tilde{A}_i = 2 \cdot C_{\varepsilon} \cdot \exp \theta_2'' = 2 \cdot C_{\varepsilon} \cdot \exp(-B_2 \theta),$$

где  $\xi_x, \xi_y, \gamma_{xy}$  и  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  - линейные и сдвиговые составляющие тензоров скоростей деформаций и деформаций;

$B_1, B_2$  - постоянные, характеризующие скоростной и деформационный параметры в полях скоростей деформаций и деформаций;

$\theta_1'', \theta_2''$  - показатели экспоненты, зависящие от координат очага деформации, характеризующие распределение скорости деформации и деформации в зоне течения;

$C_{\xi}, C_{\varepsilon}$  - постоянные, определяемые граничными и очевидными условиями очага деформации для скоростных и деформационных параметров;

$H_i, \tilde{A}_i$  - интенсивности скорости и степени деформации сдвига.

Из решений задачи следует [9],[10], что показатели экспонент

$$\theta_1'' = -B_1 \theta. \quad \theta_2'' = -B_2 \theta.$$

Используя уравнение теплопроводности, для стационарной температурной задачи (6) имеет решение в виде [8]

$$T = \exp(\theta_3'') \cdot (C_T' \cdot \sin B_3 \Phi + C_T'' \cdot \cos B_3 \Phi), \quad (15)$$

где  $\theta_3''$  - показатель экспоненты, зависящий от координат очага деформации, характеризующий распределение температуры по зоне течения;  $B_3$  - постоянная, характеризующая температурный фактор в очаге деформации.

Для температурной задачи  $\theta_3'' = -B_3 \theta$ . Это позволяет деформационные параметры и температуру математически выразить через единую функцию. Таким образом,

$$\exp(-\theta) = \left( \frac{H_i}{2 \cdot C_{\xi}} \right)^{\frac{1}{B_1}} = \left( \frac{\tilde{A}_i}{2 \cdot C_{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{B_2}} = \left( \frac{T}{(C_T' \sin B_3 \Phi + C_T'' \cos B_3 \Phi)} \right)^{\frac{1}{B_3}}.$$

Подставляя  $\exp(-\theta)$  в выражение (11) для сопротивления деформации  $k$ , получим после упрощений

$$k = C_{\sigma} \cdot (H_i)^{\frac{A_1'}{B_1}} (\tilde{A}_i)^{\frac{A_2'}{B_2}} (T')^{\frac{A_3'}{B_3}} \cdot \exp \theta_4',$$

где  $C_{\sigma}$  - постоянная величина, куда вошли значения  $C_{\xi}, C_{\varepsilon}$ . При этом

$$T' = \frac{T}{(C_T' \sin B_3 \Phi + C_T'' \cos B_3 \Phi)}.$$

Принимая  $m_1 = \frac{A_1'}{B_1}, m_2 = \frac{A_2'}{B_2}, m_3 = \frac{A_3'}{B_3}$ , имеем

$$k = C_{\sigma} \cdot (H_i)^{m_1} (\tilde{A}_i)^{m_2} (T')^{m_3} \cdot \exp \theta_4'.$$

Выражение получено аналитически и фактически совпадает с (10). Значения  $H_i$ ,  $\Gamma_i$ ,  $T$  входящие в (10) принимаются для каждой точки очага деформации и являются переменными величинами. В литературе известны аналогичные модели, но полученные на основании экспериментальных исследований в условиях однородного напряженного и деформированного состояний [4]. Для разных марок стали предел текучести  $\sigma_0$  в зависимости от интегральных параметров: скорости деформации  $U$ , степени деформации  $\varepsilon$ , температуры  $T$ , имеет вид

$$\sigma_0 = S \cdot \sigma_o \cdot U^a \cdot (10 \cdot \varepsilon)^b \cdot \left( \frac{T_o}{1000} \right)^c. \quad (16)$$

где  $\sigma_o$  - базовое напряжение текучести для конкретной марки стали;  $S$  - поправочный коэффициент;  $U$  - среднее значение скорости деформации;  $\varepsilon$  - среднее значение относительной деформации;  $T_o$  - среднее значение температуры в очаге деформации.

Анализ показывает, что выражение (10) можно упростить, если принять напряженное и деформированное состояние однородным. Это имеет место при отсутствии контактного трения. В этом случае, при подстановке в (10) значений из (13)...(15) и  $C_T' = 0$  с учетом  $A\Phi = \theta' = 0$ , получим

$$k = C_\sigma \cdot (2 \cdot C_{\sigma 1} \cdot C_\xi)^{m_1} \cdot (2 \cdot C_{\sigma 2} \cdot C_\varepsilon)^{m_2} \cdot (C_{\sigma 3} \cdot C_T'')^{m_3}. \quad (17)$$

$$\text{Из граничных условий можно получить } C_\sigma = \frac{k_o}{\exp \theta_o \cdot \cos A\Phi_o},$$

где  $k_o$  - сопротивление сдвига на контакте в крайней точке очага деформации;  $\theta_o$ ,  $A\Phi_o$  - значения функций  $\theta$  и  $A\Phi$  в крайних точках очага деформации. Выражение (17) структурно аналогично (16). Следовательно

$$k_o = \frac{S \cdot \sigma_o}{\sqrt{3}}, \quad 2 \cdot C_{\sigma 1} \cdot C_\xi = U, \quad 2 \cdot C_{\sigma 2} \cdot C_\varepsilon = 10\varepsilon, \quad C_{\sigma 3} \cdot C_T'' = \frac{T_o}{1000}$$

$$m_1 = a, \quad m_2 = b, \quad m_3 = c.$$

Следует подчеркнуть, что  $U, \varepsilon, T_o$  средние величины по очагу деформации. Определение постоянных величин  $C_\xi$ ,  $C_\varepsilon$ ,  $C_T''$  можно уточнить. Действительно, среднее значение интенсивности скорости деформации сдвига в зоне течения. Выражение (16) в данном случае используется, как своеобразное граничное условие для определения постоянных значений в (10). Величина  $k$ , с учетом всех изменений принимает вид

$$k = \frac{S \cdot \sigma_o}{\sqrt{3} \cdot \exp \theta_o \cdot \cos A\Phi_o} \cdot (U \cdot \alpha_\xi)^a \cdot (10 \cdot \varepsilon \cdot \alpha_\varepsilon)^b \cdot \left( \frac{T}{1000} \cdot \alpha_T \right)^c \cdot \exp \theta_4', \quad (18)$$

$$\text{где } \alpha_\xi = \frac{\exp(-\theta_1'')}{I_1}, \quad \alpha_\varepsilon = \frac{\exp(-\theta_2'')}{I_2}, \quad \alpha_T = \frac{\exp(-\theta_3'')}{I_3}.$$

Используя выражение (18) и (9), из уравнений равновесия можно получить формулы для определения нормальных напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , действительно :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= k' \cdot \exp \theta_4' \cdot \cos(A\Phi) + \sigma_0 + f(y) + C, \\ \sigma_y &= -k' \cdot \exp \theta_4' \cdot \cos(A\Phi) + \sigma_0 + f(x) + C, \\ \tau_{\delta\delta} &= k' \cdot \exp \theta_4' \cdot \sin A\Phi,\end{aligned}\quad (19)$$

$$\text{где } k' = \frac{S \cdot \sigma_0}{\sqrt{3} \cdot \exp \theta_0 \cdot \cos A\Phi_0} \cdot (U \cdot \alpha_\xi)^a \cdot (10 \cdot \varepsilon \cdot \alpha_\varepsilon)^b \cdot \left( \frac{T}{1000} \cdot \alpha_T \right)^c,$$

$$\text{при этом } \theta_x' = -A\Phi_y, \theta_y' = A\Phi_x.$$

Значение  $k'$  является переменной величиной и при коэффициенте трения  $f=0$ ,  $\alpha_\xi = \alpha_\varepsilon = \alpha_T = 1$ ,  $\exp \theta_0 = 1$ ,  $\cos A\Phi_0 = 1$ ,  $k'$  практически определяется формулой Андреюка-Тюленева (16). Следует отметить, что соотношения Коши-Римана определяют тип функций  $\theta$  и  $A\Phi$ , которые являются гармоническими, удовлетворяющие уравнению Лапласа. В этом случае имеем

$$A\Phi = AA_6 \cdot x \cdot y. \quad \theta' = -\frac{l}{2} \cdot AA_6 (x^2 - y^2) \quad (20)$$

Используя выражения (18)...(20) были подсчитаны напряжения при разных значениях коэффициента трения, фактора формы, степени, скорости деформации, температуры для разных марок стали.

Из рис.1 видно, что решение реагирует на коэффициент трения и фактор формы, как для нормальных, так и касательных напряжений, плавно переходящих через ноль в области нейтральной оси на контакте.

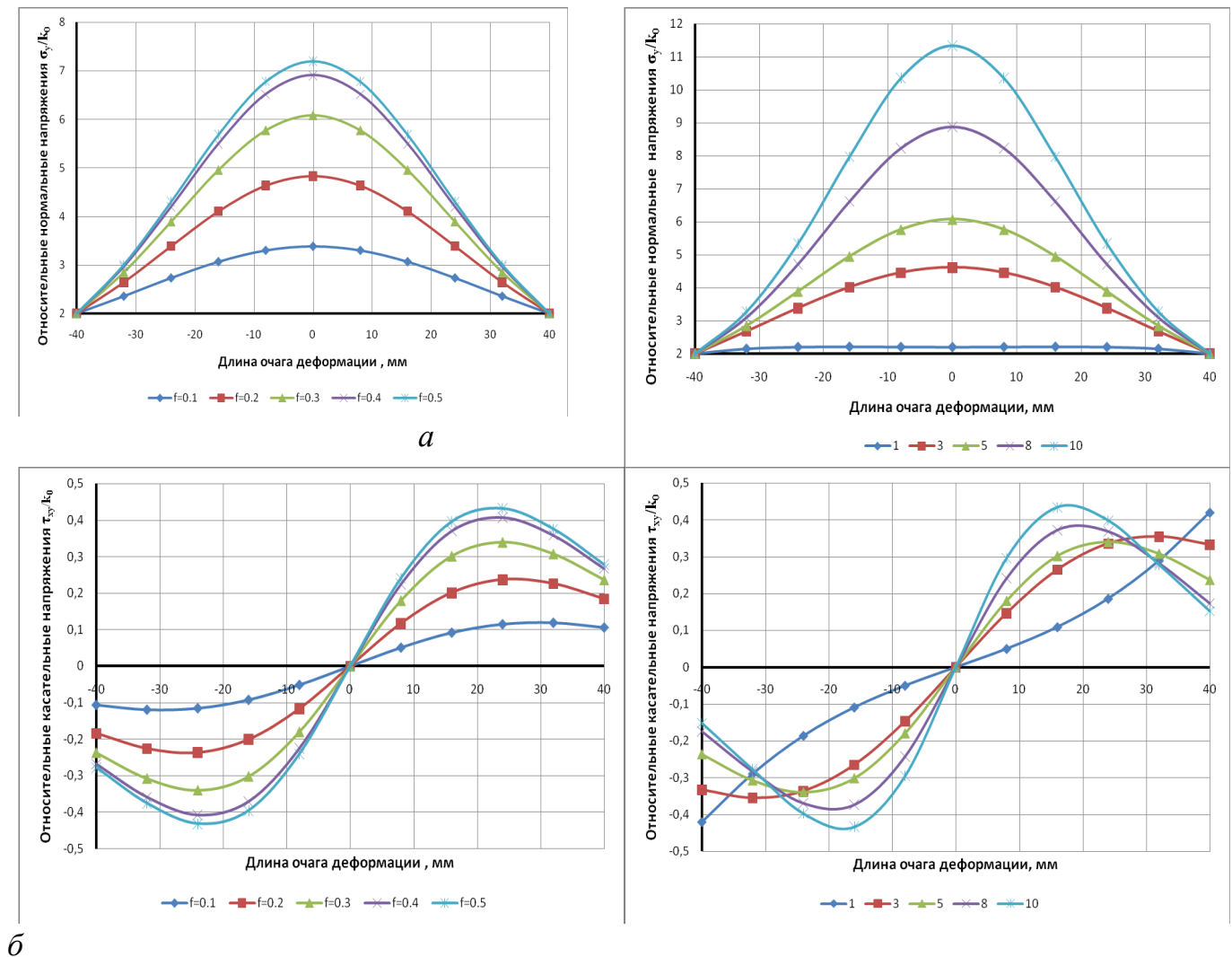
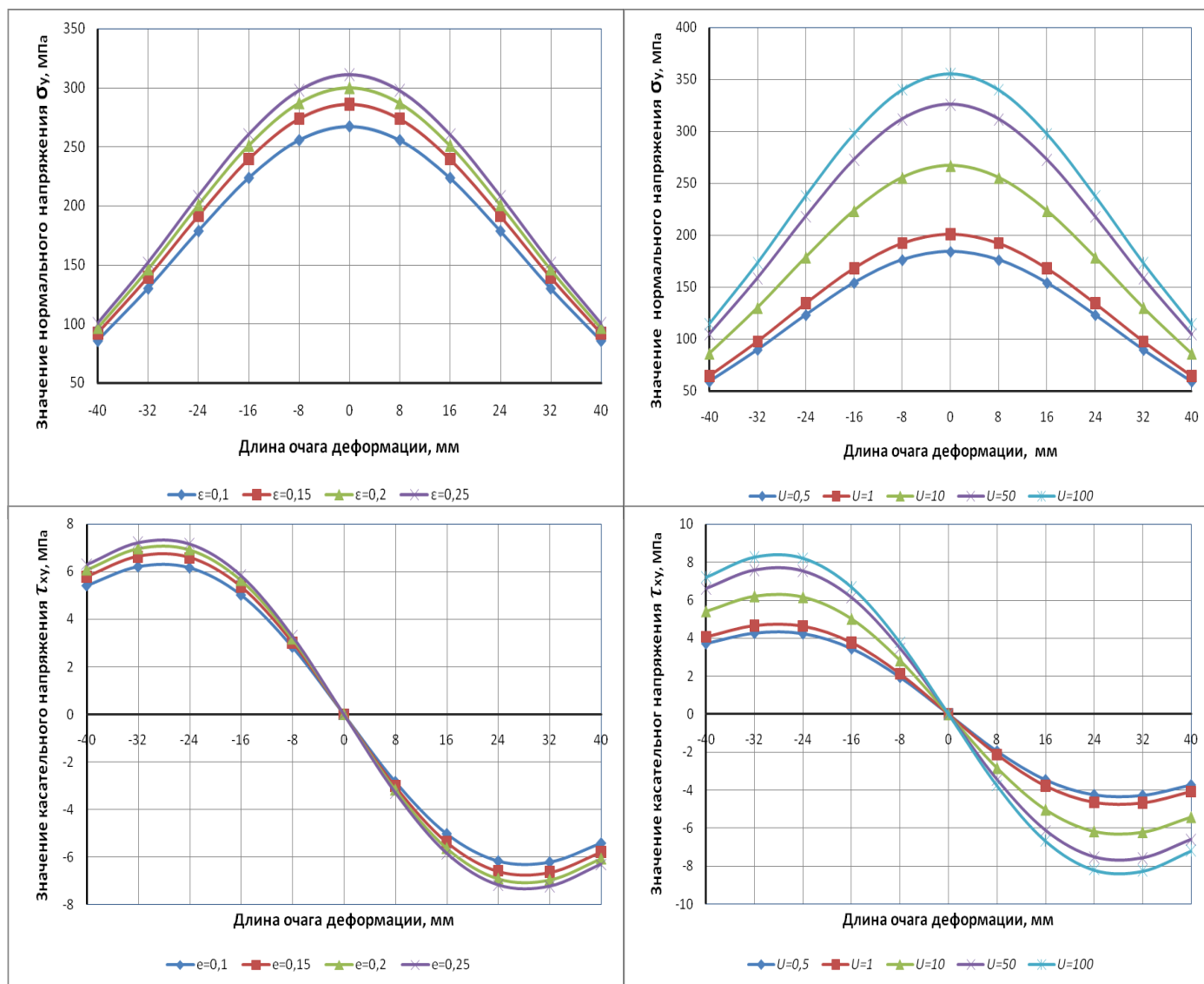


Рис.1 Распределение нормальных и касательных напряжений на контакте в зависимости от : а) коэффициента трения при  $l/h = 5$   $f = 0.1...0.5$   
 б) фактора формы  $l/h = 1,3,5,8,10$  при  $f = 0.3$

На рис.2а показано распределение напряжений при различной степени деформации для стали 3 сп. Анализ показывает, что марка стали и величина обжатия  $\varepsilon$  изменяют характер распределения напряжений в зоне течения металла.

Для той же марки стали получено распределение напряжений на контакте при разных скоростях деформации, рис.2б. Как и для деформаций, распределение напряжений в очаге деформации во многом определяется скоростными параметрами процесса.





а

б

Рис.2 Распределение нормальных и касательных напряжений на контакте в зависимости от : а). степени деформации при  $f = 0.3$ ,  $l/h = 5$ ,  $U =$ ,  $T = 1000^{\circ}C$

б). скорости деформации  $U$  при  $f = 0.3$ ,  $l/h = 5$ ,  $\epsilon =$ ,  $T = 1000^{\circ}C$

При горячей обработке температурный фактор во многом является определяющим, в значительной степени он характеризует распределение напряжений в объеме деформируемого материала, рис.3а. Разные марки стали представлены на рис.3б. Расчеты приведены для осадки на шероховатых плитах. Предложенный метод решения задач справедлив для любого способа обработки металлов давлением. Отличие заключается в граничных условиях.



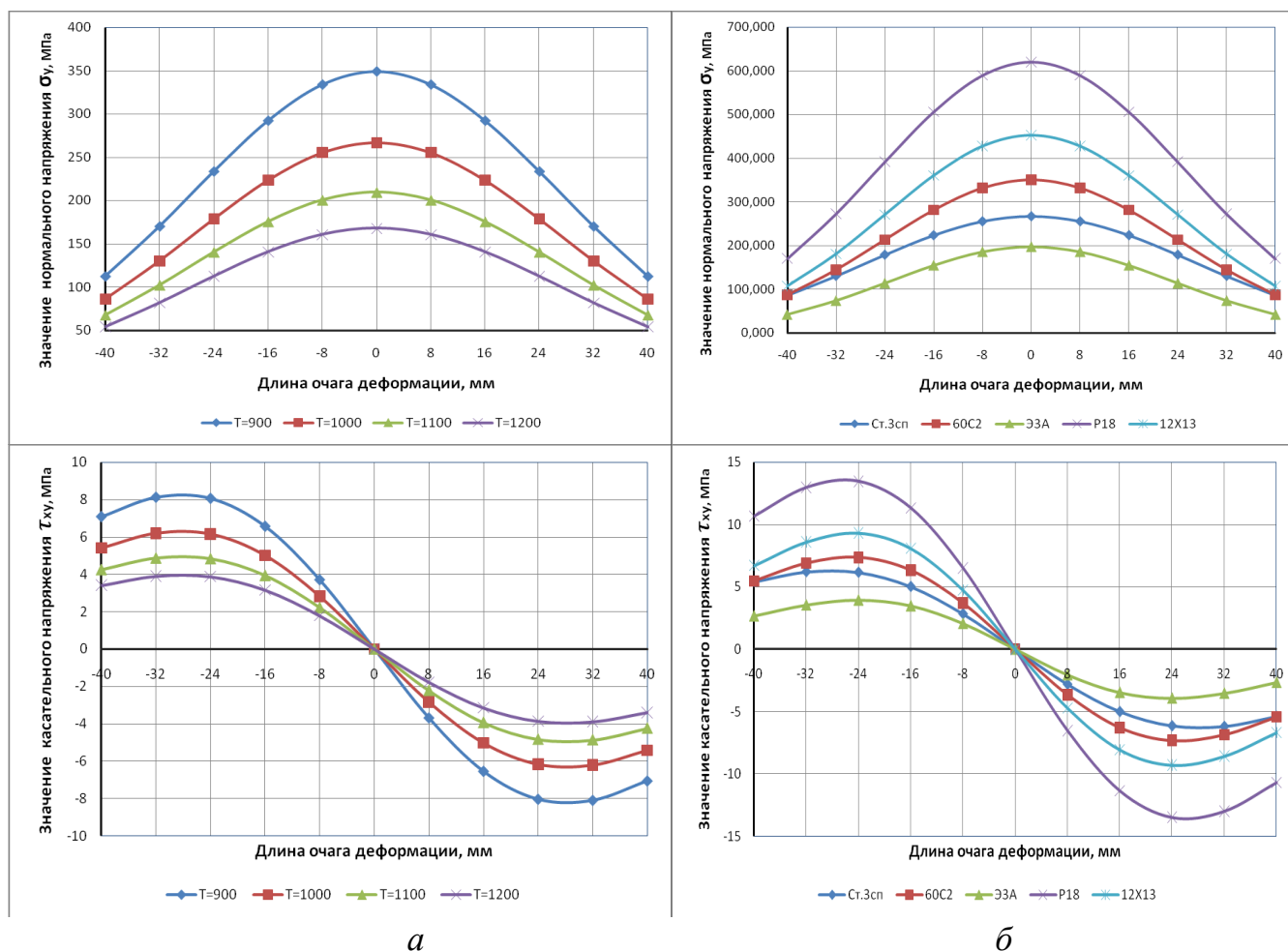


Рис.3 Распределение нормальных и касательных напряжений на контакте: а).при  $f = 0.3$ ,  $l/h = 5$ ,  $U =$ ,  $\varepsilon = 0.1$  б). для разных марок стали при  $f = 0.3, l/h = 5, \varepsilon = 0.1, U = 10c^{-1}, T = 1000^{\circ}C$

Выводы: Представленные решения позволяют сделать ряд следующих выводов:

1. На базе решения замкнутой задачи теории пластичности, аналитически получена модель сложной пластической среды, которая подтверждается экспериментальными данными других авторов.
2. Сопоставление аналитической и экспериментальной моделей позволило перейти от усредненного значения предела текучести в зоне течения к его распределению, отсюда распределению компонентов напряжений для реальной пластической среды.
3. Полученные выражения качественно и количественно верно отражают влияние большого количества факторов процесса на напряженное состояние реальной пластической среды.

**Список литературы:** 1. Громов Н.П. Теория обработки металлов давлением.-М.: Металлургия, 1978.- 359 с. 2. Сторожев М.В., Попов Е.А. Теория обработки металлов давлением.-М.: Машиностроение, 1977.- 422 с. 3. Смирнов В.С. Теория прокатки.- М.:Металлургия, 1967.- 460 с. 4. Андреюк Л.В., Тюленев Г.П. // Сталь.-1972.-9.-С. 825...828. 5. Соколов Л.Д. Влияние разности температур по сечению полосы на неравномерность деформации // Сталь.-1947.-№10.-С.51...53. 6. Чигиринский В.В. Некоторые особенности теории пластичности применительно к процессам ОМД// Тр.науч.-техн. конф. «Теория и технология процессов пластической деформации-96».- М.: МИСиС, 1997.- С.568-572. 7. V.V. Chygyrny'skyu, I. Mamuzic, F.Vodopivec,I.V. Gordienro. The Influence of the Temperature Factor on Deformability of the

Plastic Medium // Metalurgija. Zagreb.- 2006.-vol.45, br.2.-P.115-118. 8.Чигиринский В.В. Исследование влияния пространственных параметров деформированного объема на сопротивление пластической деформации сдвига// Теория и практика металлургии.-1997.- № 3.-С.31-32. 10. Чигиринский В.В. Аналитическое определение напряжений и скоростей деформаций реального очага деформации применительно к процессам обработки металлов давлением// Збірник наук.праць «Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій».- Днепропетровск: Навчальна книга, 1998, Т.3.- С.130-145. 11. Чигиринский В.В., Гордиенко В.И. Деформационная модель пластической среды с учетом температурного фактора // Вестник национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт» (Машиностроение). - 2002.- № 43.- С. 11-13.